

# Dynamique des fluides géophysiques-TD du 20 novembre 2001

## 1 Le mécanisme d'Orr (1907)

Le but de l'exercice est de comprendre dans un cadre simple les instabilités liées au cisaillement de vitesse.

On considère dans un plan (Ox,Oy) un écoulement  $(u, v)$  incompressible, sans vorticité planétaire ( $f=0$ ), composé d'un écoulement de base  $\underline{U} = Sy\mathbf{e}_x$  et des perturbations  $(u', v')$ . Les vitesses ont donc la forme suivante:

$$\begin{aligned}u &= Sy + u' = Sy - \frac{\partial\psi'}{\partial y} \\v &= v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x}\end{aligned}\tag{1}$$

a. Ecrire l'équation linéarisée de la conservation de la vorticité en faisant intervenir la vorticité perturbée  $\xi' = \nabla^2\psi'$ .

b. Si à l'instant initial  $\xi'(x, y, t = 0) = F(x, y)$ , donner une solution simple de l'équation en  $\xi'$ .

c. Premier cas:  $\xi'(x, y, t = 0) = F(x, y) = A\cos(kx)$ . Calculer l'énergie cinétique  $Ec'(t)$  à l'instant  $t$  en chaque point de la perturbation. Que peut-on dire de son amplitude au cours du temps?

d. Deuxième cas:  $\xi'(x, y, t = 0) = F(x, y) = A\cos(kx + my)$ . Calculer de nouveau  $Ec'(t)$ . En fonction de la valeur de  $m$ , dire si  $Ec'$  croît ou décroît au cours du temps.

e. Conclure quant à l'importance de l'orientation initiale des iso $\psi'$  pour la stabilité ou l'instabilité de l'écoulement.

## 2 Instabilité barocline: modèle d'Eady (1952)

Le but de l'exercice est de trouver dans le modèle simple d'Eady les caractéristiques de l'instabilité barocline (ordre de grandeur des taux de croissance, structures verticales et flux de chaleur).

Rappel des hypothèses du modèle:

- plan f ( $\beta = 0$ ).
- Fréquence de Brunt-Vaisala constante ( $N=\text{cste}$ ).
- Densité de base constante ( $\bar{\rho}(z) = \text{cte}$ ).
- Conditions aux limites  $w = 0$  pour  $z = 0, H$ .

On considère les perturbations autour de l'écoulement de base  $\underline{U} = \frac{U_0}{H} z e_x$ . On notera respectivement  $\psi, \psi'$  la fonction de courant totale et la fonction de courant perturbée.

a. Rappeler dans ce cadre d'hypothèses l'équation de conservation de la vorticité potentielle quasi-géostrophique ainsi que les conditions aux limites en fonction de la fonction de courant totale  $\psi$  (faire apparaître le rayon de déformation  $D = \frac{NH}{f}$  et la nouvelle variable  $\zeta = \frac{z}{H}$ ).

b. Linéariser les équations en faisant apparaître la fonction de courant perturbée  $\psi'$ . On considère désormais  $\psi'$  sous la forme suivante:

$$\psi' = \text{Re}(\phi(\zeta) \cos(l y) \exp(ik(x - ct))),$$

et on notera  $\mu = D \cdot \text{sqr}(k^2 + l^2)$ . Donner l'équation en  $\phi$  à l'intérieur du fluide en fonction de  $\mu$ . Résoudre cette équation. En déduire à l'aide des conditions aux limites pour quelles conditions la vitesse de phase  $c$  va-t-elle devenir complexe et entraîner une croissance exponentielle de la perturbation.

c. Taux de croissance, nombre d'onde de coupure: pour quels nombres d'onde a-t-on instabilité? En choisissant  $k = l = \frac{2\pi}{L}$  et  $D = 1000 \text{ km}$ , calculer la valeur limite  $L_c$  de  $L$  au delà de laquelle il y a instabilité.

d. Flux de chaleur et structure verticale: calculer en chaque point  $(y, z)$  la moyenne sur  $x$  du flux de chaleur dans le cas instable. En déduire pour quelle type de structure verticale en  $\psi'$  le flux est-il vers le Nord?